

# **DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ**

**calculatrice: autorisée**

**durée: 4 heures**

## **Sujet**

<u>Réacteur refroidi à l'hélium</u> .....	2
I. <u>Les cycles utilisés</u> .....	2
A. <u>Cycle de Brayton</u> .....	2
B. <u>Cycle de Brayton avec régénérateur</u> .....	4
II. <u>Les particules de combustible nucléaire</u> .....	5
III. <u>Dimensionnement de la centrale</u> .....	7
<u>Détermination de spectre d'absorption par effet photoacoustique</u> .....	8
I. <u>Préliminaire : loi de Fourier, équation de diffusion thermique et résistance thermique</u> .....	8
II. <u>L'expérience en régime stationnaire</u> .....	9
A. <u>Transferts thermiques dans l'air</u> .....	11
B. <u>Transferts thermiques dans l'échantillon</u> .....	11
C. <u>Interface air- échantillon et régime stationnaire de l'ensemble</u> .....	12
III. <u>L'expérience en régime sinusoïdal</u> .....	12
A. <u>Température dans l'air</u> .....	12
B. <u>Température dans l'échantillon</u> .....	13
C. <u>Température de surface</u> .....	13
IV. <u>Variations de pression induite</u> .....	14

# Réacteur refroidi à l'hélium

Les centrales nucléaires de la génération 4 prévues vers les années 2030 devront être sûres et présenter un rendement important. Une option étudiée parmi six grands choix est le réacteur à très haute température refroidi à l'hélium. Ce type de réacteur offrirait l'avantage d'améliorer l'efficacité de la conversion énergétique, compte tenu de la température élevée de la source chaude et de permettre en sus la production d'hydrogène. Dans ces installations de forte puissance, on utilise le cycle de Brayton (ou cycle de Joule) pour extraire le travail et, en fin de compte, produire de l'électricité.

Les deux premières parties sont indépendantes. La première partie concerne le cycle moteur de Brayton ainsi qu'une amélioration possible pour augmenter l'efficacité. La deuxième partie est relative aux transferts thermiques dans le cœur de la centrale.

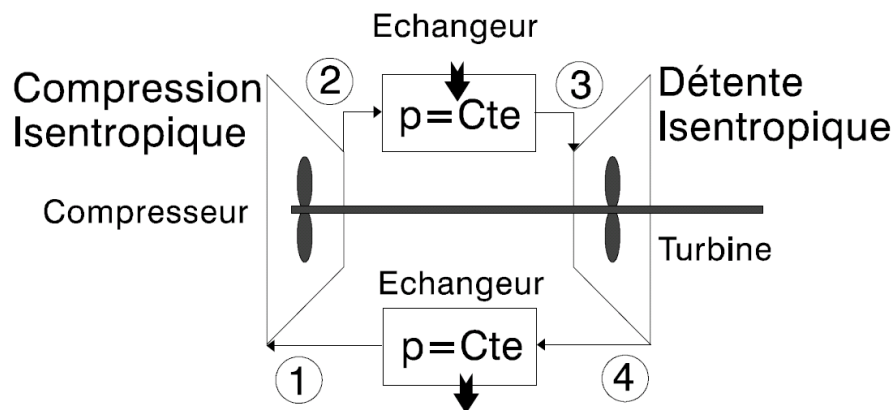
Le gaz utilisé dans la centrale est l'hélium, dont les caractéristiques sont :

- Capacité thermique molaire à pression constante :  $C_{pm} = 5 R/2$
- Constante des gaz parfaits :  $R = 8,314 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
- Masse molaire de l'hélium :  $M_{He} = 4,00 \times 10^{-3} kg \cdot mol^{-1}$

Dans l'ensemble du problème, le gaz est supposé parfait.

## I. Les cycles utilisés

### A. Cycle de Brayton



**Figure n° 1 : Cycle de Brayton**

Un gaz parfait circule dans une installation. Il échange du travail avec l'extérieur dans le compresseur et la turbine. Le travail fourni par le passage du gaz dans la turbine sert d'une part à faire fonctionner le compresseur (turbine et compresseur montés sur le même axe) et d'autre part à fabriquer de l'électricité. Les transferts thermiques ont lieu dans des échangeurs. Le fluide, ici un gaz d'hélium, décrit le cycle de Brayton (voir *figure n° 1*). Dans la suite, les applications numériques concerneront une mole d'hélium.

Le cycle est constitué de deux isobares et de deux isentropiques :

-compression adiabatique réversible du *point 1* avec une température  $T_1=300\text{ K}$  et une pression  $P_1=20 \times 10^5\text{ Pa}$  vers le *point 2* à la pression  $P_2=80 \times 10^5\text{ Pa}$  ,

-transformation isobare du *point 2* vers le *point 3* à la température  $T_3=1300\text{ K}$  ,

-détente adiabatique réversible du *point 3* vers le *point 4* (de  $P_3=P_2$  à  $P_4=P_1$  ),

-transformation isobare du *point 4* vers le *point 1* .

Dans la suite, on posera  $r_p = \frac{P_2}{P_1}$  .

Le nombre de moles de fluide considéré est désigné par  $n$  .

1. Démontrer, en partant de l'entropie, que pour une transformation isentropique, la relation entre  $T$  et  $P$  peut se mettre sous la forme :  $\frac{T}{P^\beta} = \text{Constante}$  . Exprimer  $\beta$  en fonction des données.
2. On rappelle  $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$  avec  $C_{vm}$  capacité thermique molaire à volume constant. Démontrer l'expression de  $\gamma$  en fonction de  $\beta$  . Application numérique: calculer  $\beta$  et  $\gamma$  . (La notation  $\gamma$  n'est pas utilisée dans la suite).
3. Déterminer les températures  $T_2$  et  $T_4$  en fonction de  $T_1$  ,  $T_3$  ,  $r_p$  ,  $\beta$  . puis effectuer les applications numériques.
4. Préciser la nature de la transformation  $2 \rightarrow 3$  et celle de la transformation  $4 \rightarrow 1$  .
5. Tracer le cycle de Brayton sur un diagramme  $P=f(V_m)$  avec  $V_m$  : volume molaire.

Pour une transformation élémentaire d'une mole de fluide, on peut écrire si les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle du gaz sont négligeables:  $dH_m = \delta W_{\text{utile},m} + \delta Q_m$  avec

$H_m$  : enthalpie molaire

$\delta Q_m$  : chaleur molaire reçue de l'extérieur

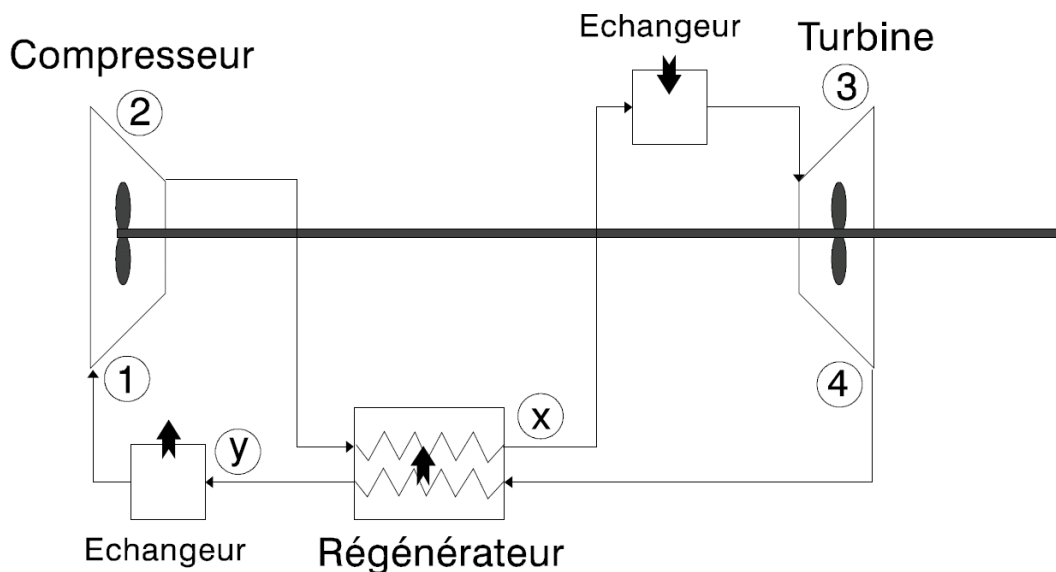
On pose aussi

$\delta W_m$  : travail total molaire reçu de l'extérieur

6. Exprimer  $dU_m$  , variation d'énergie interne molaire en écrivant le premier principe et en déduire l'expression de  $\delta W_{\text{utile},m}$  en fonction de  $\delta W_m$  et des variables pression  $P$  et volume molaire  $V_m$  . En déduire que, si la transformation est réversible,  $\delta W_{\text{utile},m} = V_m dP$  .
7. Exprimer pour  $n$  moles (en fonction des données mais on pourra utiliser  $\beta$  ) les transferts thermiques reçus  $Q_{23}$  et  $Q_{41}$  lors des transformations isobares  $2-3$  et  $4-1$  . Application

- numérique: calculer  $Q_{23m}$  et  $Q_{41m}$  pour une mole d'hélium.
8. Exprimer pour  $n$  moles les travaux (travaux utiles reçus)  $W_{12}$  et  $W_{34}$  échangés avec l'extérieur lors des transformations isentropiques 1-2 et 3-4 . Application numérique pour une mole.
  9. Exprimer le travail fourni par le fluide au cours d'un cycle en fonction des températures  $T_3$  et  $T_1$  , de  $C_{pm}$  , de  $n$  , de  $\beta$  et du rapport des pressions  $r_p$  .
  10. Exprimer l'efficacité  $e$  en fonction de  $r_p$  et de  $\beta$  et montrer que  $e = 1 - \frac{1}{(r_p)^\beta}$  Calculer numériquement cette efficacité.
  11. Retrouver l'expression de l'efficacité de Carnot (dans le cas d'un cycle bitherme) et faire l'application numérique en utilisant les deux températures extrêmes du cycle pour le calcul. Conclure.
  12. Les températures  $T_3$  et  $T_1$  étant fixées, montrer que le travail fourni par le fluide au cours d'un cycle passe par une valeur maximale pour une certaine valeur du rapport des pressions notée  $r_{p,max}$  . Déterminer l'expression de  $r_{p,max}$  en fonction de  $T_3$  ,  $T_1$  et  $\beta$  . Exprimer l'efficacité dans ce cas.
  13. Application numérique: calculer  $r_{p,max}$  et l'efficacité correspondante.

## B. Cycle de Brayton avec régénérateur



**Figure n° 2 : Cycle de Brayton avec régénérateur**

L'utilisation d'un régénérateur (ou récupérateur de chaleur) pendant les deux transformations isobares peut se révéler judicieux dans certaines conditions que nous allons déterminer. Si la température à la sortie de la turbine est plus élevée que la température du gaz comprimé à la sortie du compresseur, une partie de l'énergie du gaz sortant de la turbine peut être cédée (en recourant à

un régénérateur) au gaz allant vers l'échangeur chaud et ainsi améliorer l'efficacité du cycle de Brayton. On suppose que les transferts thermiques associés au régénérateur sont internes.

Dans le cycle, nous rajoutons deux lettres  $x$  et  $y$  afin d'isoler la partie échangée dans le régénérateur. Le cycle est donc composé comme indiqué sur la *figure n°2* :

- compression adiabatique réversible du *point 1* vers le *point 2* ,
- isobare du *point 2* vers le *point x* dans le régénérateur puis du *point x* au *point 3* en contact avec le thermostat chaud,
- détente adiabatique réversible du *point 3* vers le *point 4* ,
- isobare du *point 4* vers le *point y* dans le régénérateur puis du *point y* au *point 1* en contact avec le thermostat froid.

On suppose un régénérateur parfait, on a alors:  $T_x = T_4$  et  $T_y = T_2$  .

14. Exprimer, en fonction des températures  $T_1$  ,  $T_2$  ,  $T_3$  ,  $T_4$  et des autres données, les transferts thermiques molaires  $Q_{x3}$  et  $Q_{y1}$  provenant des thermostats.
15. En déduire l'efficacité en fonction du rapport  $\frac{T_1}{T_3}$  , de  $r_p$  et de  $\beta$  . Application numérique avec  $P_1 = 20 \times 10^5 Pa$  et  $P_2 = 80 \times 10^5 Pa$  .
16. Pour quelle valeur de  $r_p$  notée  $r_{pe}$  l'efficacité avec régénérateur est-elle égale à l'efficacité sans régénérateur ? Vérifier alors que  $T_2 = T_4$  , ce qui veut dire que le régénérateur ne joue plus aucun rôle.
17. Calculer numériquement  $r_{pe}$  dans ce cas.
18. Expliquer vers quelle valeur devrait tendre  $r_p$  , dans le cas d'un cycle avec régénérateur, pour atteindre l'efficacité de Carnot déterminée plus haut. Pour y parvenir, on utilise un étagement de la compression et de la détente. Commenter. A la limite (nombre d'étages infini), on obtiendrait le cycle d'Ericsson constitué de deux isothermes et de deux isobares.

## II. Les particules de combustible nucléaire

Le combustible est constitué de petites sphères multicouches appelées particules TRISO (voir *figure n°3* ). Le cœur de matériau fissile est entouré de plusieurs couches successives ayant pour rôles d'assurer la protection du noyau et le confinement des produits de fission. Nous prendrons comme matériau pour le cœur et la couche de céramique non pas un oxyde d'uranium  $UO_2$  et un carbure de silicium  $SiC$  comme déjà utilisé dans des centrales nucléaires mais un carbure d'uranium  $UC$  et un carbure de zirconium  $ZrC$  pour leurs propriétés physiques plus intéressantes.

Dans cette partie, on considèrera que les propriétés physiques sont isotropes dans l'espace.

La puissance par unité de volume produite sous forme d'énergie thermique dans le matériau fissile  $UC$  sera notée  $\sigma_0$  . La conductivité thermique de la couche numérotée  $i$  sera notée  $\lambda_i$  .

19. L'équation de la chaleur pour le cœur en tenant compte du terme de production s'écrit:

$$\frac{\partial u_V}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_Q) + \sigma_Q . \text{ Justifier cette équation.}$$

20. En régime stationnaire, à quoi se réduit cette équation ?

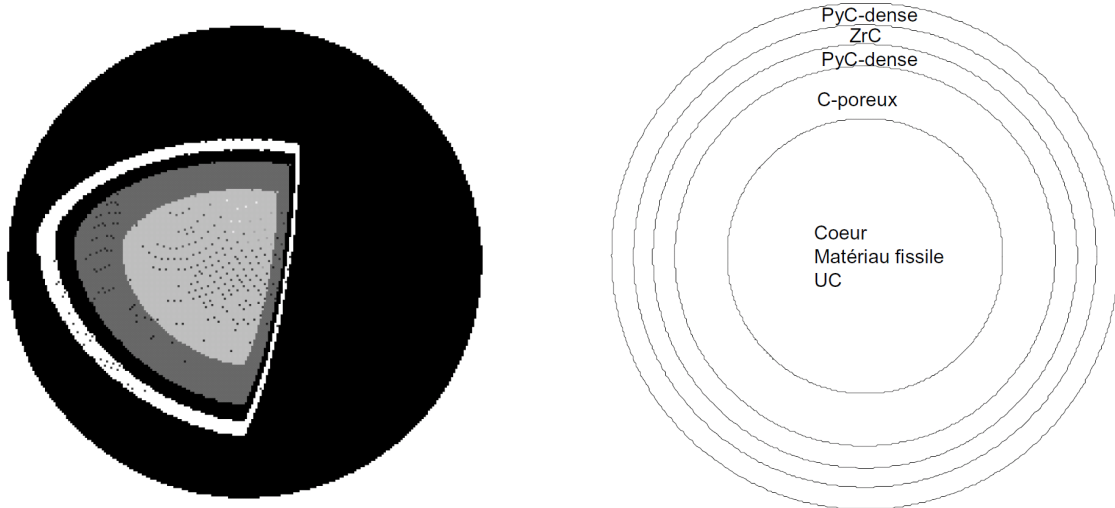


Figure n° 3 : Vue et coupe d'une particule TRISO

Couche	Position	Rayon extérieur (m)	Conductivité thermique $\lambda$ ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
Carbure d'uranium (UC)	$r < r_1$	$r_1 = 250 \times 10^{-6}$	12
Carbone poreux	$r_1 < r < r_2$	$r_2 = 345 \times 10^{-6}$	0,5
Carbone pyrolytique (PyC) dense	$r_2 < r < r_3$	$r_3 = 385 \times 10^{-6}$	4
Carbure de zirconium (ZrC)	$r_3 < r < r_4$	$r_4 = 420 \times 10^{-6}$	20
Carbone pyrolytique (PyC) dense	$r_4 < r < r_5$	$r_5 = 460 \times 10^{-6}$	4

Tableau n° 1 : caractéristiques de couches composant la particule TRISO

21. Sachant que le laplacien en coordonnées sphériques d'un champ scalaire  $\Psi(r, \theta, \varphi)$  vaut :  $\vec{\nabla}^2 \Psi = \Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}$ , déterminer  $T(r)$  pour  $r \leq r_1$ . On notera  $T_0$  la température en  $r=0$ .

22. Calculer numériquement la variation de température entre les abscisses  $r=0$  et  $r=r_1$ . La puissance volumique  $\sigma_Q$  vaut  $5,0 \times 10^9 \text{ W.m}^{-3}$ .

Afin de calculer la température dans les différentes couches de la particule TRISO (donc  $r \geq r_1$ ), nous allons utiliser le concept de résistance thermique.

23. Donner la définition de la résistance thermique  $R_{th}$  d'un matériau soumis à un écart de

température  $T_1 - T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) impliquant un flux thermique  $\Phi_{th}$  ( $\Phi_{th} > 0$  selon l'axe décroissant des températures).

24. Déterminer le flux thermique en coordonnées sphériques et le mettre sous la forme :

$$\Phi_{th} = A \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)} \quad \text{où la constante } A \text{ est à exprimer en fonction des données du problème.}$$

25. Retrouver l'expression de la résistance thermique  $R_{th,12}$  d'une coque comprise entre un rayon  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ).

26. Calculer numériquement les résistances thermiques des 4 coques,  $R_{th,12}$ ,  $R_{th,23}$ ,  $R_{th,34}$  et  $R_{th,45}$ .

27. Exprimer puis calculer les températures aux interfaces  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$  si la température extérieure  $T_5$  vaut  $1300 K$ .

### III. Dimensionnement de la centrale

La centrale nucléaire a une puissance thermique de  $P_{th} = 600 MW$  et une puissance électrique de  $P_e = 300 MW$ .

28. À partir de la puissance volumique  $\sigma_Q = 5,0 \times 10^9 W.m^{-3}$  du combustible nucléaire, déterminer le nombre de particules TRISO nécessaires au fonctionnement du réacteur.

29. Quel volume en  $m^3$  cela représente-t-il ? On considèrera un empilement cubique simple des particules TRISO (particules aux sommets du cube).

30. Que vaut l'efficacité du cycle thermodynamique de la centrale en considérant l'absence de pertes lors de la conversion du travail moteur en énergie électrique ?

Pour estimer le débit d'hélium  $D$ , nécessaire au fonctionnement de l'installation, on suppose une installation idéale fonctionnant sur le cycle d'Ericsson (voir *question 18* : il s'agit d'un cycle avec deux isothermes et deux isobares) Les échanges externes ont lieu uniquement sur les étagements assimilés à des transformations isothermes.

31. Déterminer le transfert thermique  $Q_C$  nécessaire pour faire passer une mole d'hélium dans un système ouvert de la pression  $P_2 = 80 \times 10^5 Pa$  à la pression  $P_1 = 20 \times 10^5 Pa$  sachant que la température constante du gaz est imposée par le contact avec le thermostat  $T_C = 1300 K$

32. En déduire le débit d'hélium  $D$ , en  $kg.s^{-1}$ , permettant le fonctionnement de l'installation.

## Détermination de spectre d'absorption par effet photoacoustique

On se place dans un référentiel galiléen  $(R)$ , rapporté au trièdre cartésien  $Oxyz$ , associé à la base orthonormée directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Les fonctions harmoniques du temps, du type  $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , sont représentées en notation complexe par une grandeur soulignée  $\underline{f}(t) = A \exp(j(\omega t + \varphi))$  (où  $j$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $+\frac{\pi}{2}$ ).

### I. Préliminaire : loi de Fourier, équation de diffusion thermique et résistance thermique.

D'abord étudiée expérimentalement, la loi de la conduction thermique devint analytique en 1822, grâce à Joseph Fourier.

Soit  $\lambda$  la conductivité thermique d'un milieu isotrope et homogène donné et  $T(x, y, z, t)$  le champ de température en un point de ce milieu désigné par  $M(x, y, z)$ . On note  $\vec{j}_Q$  le vecteur densité de flux thermique.

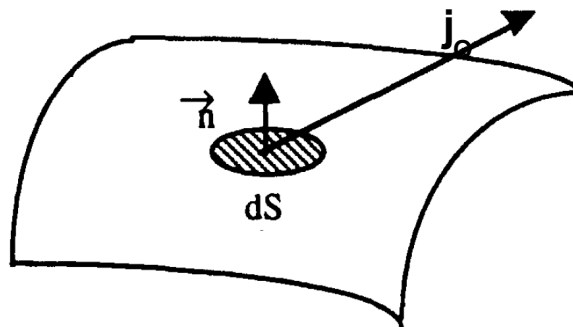


Figure 1

1. Rappeler la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur dans un milieu homogène, en indiquant les unités des différentes grandeurs.
2. Quelle est la signification physique du signe moins intervenant dans la loi de Fourier?
3. Que peut-on déduire de la relation :  $dT = \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot d\vec{M} = 0$  ?
4. Soit donc un milieu isotrope à caractéristiques physiques homogènes, indéformable, de conductivité thermique  $K$  et de capacité thermique volumique  $\rho c$ , où  $\rho$  est la masse volumique supposée constante et  $c$  la capacité thermique massique supposée constante à pression constante; soit  $p$  la puissance thermique volumique fournie par les sources internes du milieu. Ce milieu est limité d'un côté par un plan en  $z=z_1$  et de l'autre côté par un plan  $z=z_2$  avec  $z_2 > z_1$ . On ne considère qu'un phénomène de conduction thermique unidimensionnel selon l'axe  $Oz$ . On suppose que les transferts thermiques s'effectuent à pression constante. Établir l'équation de la diffusion thermique dans ce milieu, en appliquant le premier principe de la thermodynamique à un élément de volume arbitraire  $dV = S \cdot dz$ , de



longueur  $dz$ , où  $S$  est la section du matériau.

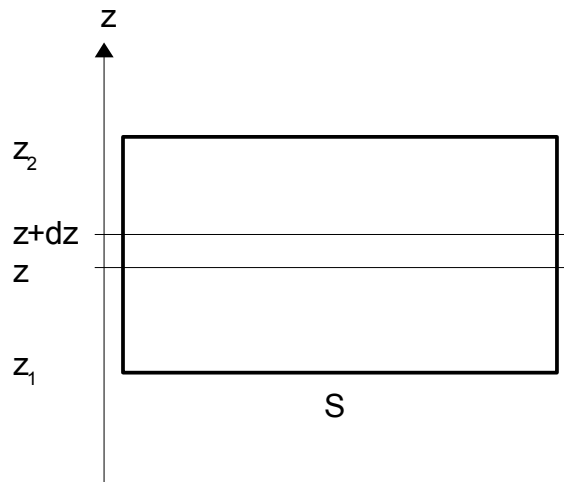


Figure 2

5. Comment se simplifie l'équation précédente, si de plus le milieu est sans source interne ?
6. Que devient cette expression en régime permanent ? En déduire la répartition de température à l'intérieur du milieu si  $T(z=z_1)=T_1$  et  $T(z=z_2)=T_2$ . En déduire l'expression de la conductance  $G_C$  et la résistance thermique  $R_C$  du milieu.
7. L'équation de la diffusion thermique n'est pas le seul apport de J. Fourier aux sciences exactes : en connaissez vous d'autres ?

## II. L'expérience en régime stationnaire

### Définitions :

On appelle intensité de l'onde électromagnétique progressant dans la direction  $\vec{u}_z$ , la puissance électromagnétique (moyennée dans le temps)  $I(z)$  traversant une surface unité perpendiculaire à  $\vec{u}_z$  située à la cote  $z$ .

Lorsqu'une onde électromagnétique traverse un milieu, un modèle simple pour l'absorption résonante montre que l'intensité de l'onde (puissance moyenne transportée par unité de surface), varie avec la distance parcourue  $|z|$  selon une loi de décroissance exponentielle de la forme  $I(z)=I_0 \exp(-\alpha|z|)$ ,  $I_0$  étant une constante et  $\alpha$  le coefficient d'absorption de l'échantillon.

### Principe de l'expérience :

On étudie une méthode de mesure indirecte (méthode de mesure bioacoustique) du coefficient d'absorption d'une onde lumineuse par un solide. On étudie l'absorption de la lumière par les effets thermiques qu'elle induit.

Le principe de la méthode est schématisé en *figure 3* : l'échantillon à étudier est placé dans une enceinte fermée de section  $S$  ; il occupe la région  $-L_e < z < 0$  et est surmonté par de l'air, gaz

supposé parfait, occupant l'intervalle  $0 < z < L$  .

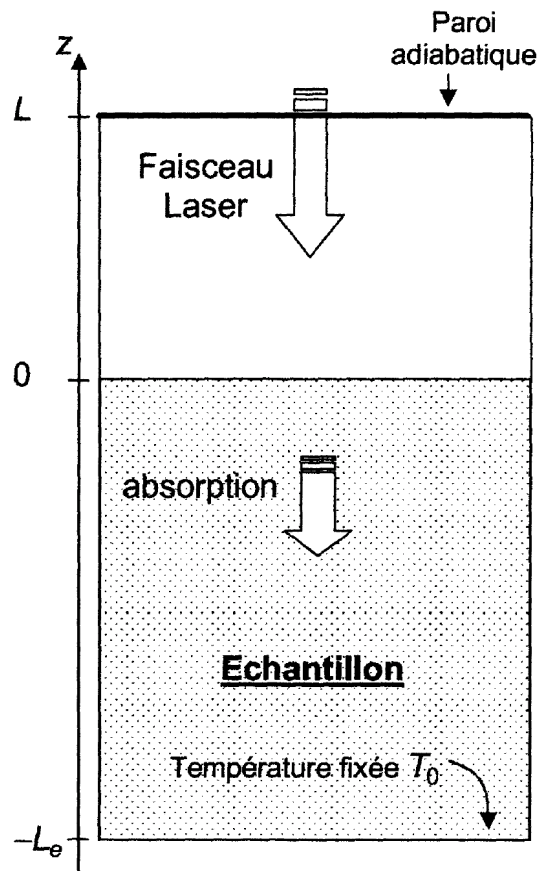


Figure 3

Par une fenêtre transparente ménagée dans la paroi  $z=L$  , on envoie, en incidence normale, un faisceau laser monochromatique de pulsation  $\omega$  . L'onde lumineuse est partiellement transmise dans l'échantillon, où elle est absorbée. Le transfert thermique associé induit un gradient de température, dans l'échantillon *et dans l'air*, qui s'accompagne d'une variation de la pression dans l'enceinte. Cette variation de pression, mesurée à l'aide de microphones très sensibles peut ainsi donner accès au coefficient d'absorption de l'échantillon. Ce type de mesure est nommé « mesure photoacoustique d'absorption ».

#### Hypothèses :

On étudie un modèle de cette expérience basé sur les hypothèses suivantes :

1) L'échantillon (resp. l'air) a une conductivité thermique  $K_e$  (resp  $K_a$  ), une masse volumique  $\rho_e$  (resp  $\rho_a$  ) et une capacité thermique massique à pression constante  $c_e$  (resp.  $c_a$  ). Dans un premier temps,  $\rho$  et  $c$  sont supposés constants pour l'air et pour l'échantillon.

2) On ne tient compte que des phénomènes de transferts thermiques par conduction.

3) On néglige les effets de bords et on suppose donc que la température ne dépend que de la cote  $z$  et,

éventuellement, du temps  $t$ . On note la température dans l'échantillon  $T_e(z, t)$  (pour  $z < 0$ ) et la température dans l'air  $T_a(z, t)$  (pour  $z > 0$ ).

4) Le contact thermique air-échantillon est parfait : la température est continue à l'interface  $z = 0$ .

5) Les variations de pression dans l'enceinte sont très faibles : on pourra donc considérer que les transferts thermiques s'effectuent à pression constante.

6) L'onde incidente n'est pas absorbée dans l'air.

7) La paroi  $z = L$  est adiabatique, et l'échantillon est maintenu à une température  $T_0$  en  $z = -L_e$ .

### A. Transferts thermiques dans l'air

On admet qu'en première approximation, le champ  $T_a(z, t)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2} \quad (1) \quad \text{où} \quad D_a = \frac{K_a}{\rho_a c_a}$$

8. Déterminer la forme générale des solutions stationnaires de (1) (c'est-à-dire pour lesquelles  $T_a(z)$  ne dépend pas du temps).

9. Quelle condition la paroi adiabatique impose-t-elle en  $z = L$  ? En déduire que le champ de température dans l'air est uniforme en régime stationnaire.

### B. Transferts thermiques dans l'échantillon

Dans l'échantillon (pour  $z < 0$ ), l'intensité de l'onde lumineuse (puissance moyenne transportée par unité de surface), varie avec  $z$  selon une loi  $I(z) = I_0 \exp(\alpha z)$ ,  $I_0$  étant une constante, et  $\alpha$  le coefficient d'absorption de l'échantillon. La puissance perdue par l'onde est intégralement fournie à l'échantillon. On admet que l'intensité de l'onde est uniforme sur toute la section  $S$  de l'échantillon.

10. On considère le système  $(\Sigma)$  formé par une portion de l'échantillon, de section  $S$ , comprise entre  $z$  et  $z + dz$ .

- Exprimer l'énergie apportée par l'onde en  $z + dz$  pendant une durée élémentaire  $dt$ .
- Exprimer l'énergie de l'onde sortant en  $z$  pendant  $dt$ .
- En déduire la puissance moyenne reçue par le système  $(\Sigma)$  de la part de l'onde lumineuse en fonction de  $I_0$ ,  $\alpha$ ,  $S$ ,  $z$  et  $dz$ .
- Cette puissance supplémentaire (due à l'onde lumineuse) dans le milieu peut être interprétée dans les équations comme un terme de production au sein du milieu. Exprimer  $p$  la puissance thermique volumique de production dans le milieu correspondant à ce mode de description.
- Pourquoi peut-on dans les calculs précédents légitimement considérer la puissance moyenne et non la puissance instantanée fournie par l'onde lumineuse ?

11. En effectuant un bilan énergétique sur  $(\Sigma)$ , montrer que  $T_e(z, t)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :  $\frac{\partial T_e}{\partial t} = D_e \times \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z) \right)$  (2) où  $D_e$  est un coefficient

constant que l'on exprimera à l'aide des paramètres  $\rho_e$ ,  $c_e$  et  $K_e$ .

12. En régime stationnaire, déterminer la forme générale de la température  $T_e(z)$  dans l'échantillon en fonction de  $\alpha$ ,  $z$ ,  $K_e$ ,  $I_0$  et de deux constantes d'intégration.

### C. Interface air-échantillon et régime stationnaire de l'ensemble

13. A partir des relations de continuité de la température et du vecteur densité de courant thermique, écrire les relations existant entre  $T_e(z=0^-, t)$  et  $T_a(z=0^+, t)$ , d'une part et  $K_e$ ,  $K_a$ ,  $\frac{\partial T_e}{\partial z}(z=0^-, t)$  et  $\frac{\partial T_a}{\partial z}(z=0^+, t)$  d'autre part.

14. On se place en régime stationnaire, où la température est notée  $T_{es}(z)$  dans l'échantillon et  $T_{as}(z)$  dans l'air. Expliciter les conditions aux limites vérifiées par la température en  $z=-L_e$  et  $z=0$ . Exprimer  $T_{es}(z)$  en fonction de  $I_0$ ,  $K_e$ ,  $L_e$ ,  $\alpha$ ,  $T_0$  et  $z$ .

15. Dans la pratique, l'onde lumineuse est totalement absorbée dans l'échantillon, ce qui se traduit mathématiquement par la condition  $\alpha L_e \gg 1$ . On adopte alors pour  $T_{es}(z)$  l'expression simplifiée :  $T_{es}(z) \approx \frac{I_0}{K_e}(z+L_e) + T_0$ . Calculer la puissance thermique  $P_{th}$  évacuée par conduction à la frontière  $z=-L_e$ , en fonction de  $I_0$  et  $S$ . Retrouver très simplement ce résultat en effectuant un bilan énergétique sur un système bien choisi.

16. Exprimer la température dans l'air  $T_{as}(z)$ , en fonction de  $T_0$ ,  $I_0$ ,  $L_e$  et  $K_e$ .

17. Est-il possible de réaliser une mesure photoacoustique d'absorption en régime stationnaire ?

## III. L'expérience en régime sinusoïdal

On suppose désormais que l'onde excitatrice a une intensité modulée sinusoïdalement à la pulsation  $\Omega$  selon une loi  $I_0(t) = I_0(1 + \cos \Omega t)$  où  $I_0$  est une constante. L'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $T_e(z, t)$  devient donc, en conservant les mêmes notations :

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = D_e \times \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z) (1 + \cos(\Omega t)) \right) \quad (3)$$

L'équation vérifiée par  $T_a(z, t)$  dans l'air est inchangée par rapport à la question II A.

On étudie une situation de régime sinusoïdal établi dans laquelle les températures dans l'échantillon et dans l'air s'écrivent respectivement  $T_e(z, t) = T_{es}(z) + \theta_e(z, t)$  et  $T_a(z, t) = T_{as}(z) + \theta_a(z, t)$  où  $\theta_e(z, t)$  et  $\theta_a(z, t)$  sont des fonctions sinusoïdales de pulsation  $\Omega$ . Les fonctions  $T_{es}(z)$  et  $T_{as}(z)$  sont les températures de régime stationnaire précédemment étudiées.

En représentation complexe, on note :  $\underline{\theta}_e(z, t) = g_e(z) \cdot \exp(j\Omega t)$ , et  $\underline{\theta}_a(z, t) = g_a(z) \cdot \exp(j\Omega t)$ ,  $g_e(z)$  et  $g_a(z)$  étant des fonctions à valeurs complexes.

### A. Température dans l'air

18. Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\theta_a(z, t)$ . Montrer que  $g_a(z)$  vérifie une équation de la forme :  $\frac{d^2 g_a}{dz^2} - \left( \frac{1+j}{\delta_a} \right)^2 g_a(z) = 0$  où  $\delta_a$  est un paramètre, homogène à une

longueur, que l'on exprimera en fonction de  $D_a$  et  $\Omega$ .

19. Quelle est la condition aux limites vérifiée par  $g_a(z)$  en  $z=L$ ? Du fait que  $L \gg \delta_a$  on admet qu'on peut remplacer  $z=L$  par  $z=\infty$  pour exprimer cette condition aux limites sur  $g_a$ . On pose  $g_a(0)=\theta_0$ . En déduire que  $g_a(z)=\theta_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_a}\right)$ . Quel sens concret peut-on donner à  $\delta_a$ ?
20. Application numérique. Pour l'air, on a  $D_a=2,2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminer numériquement  $\delta_a$  pour une modulation du faisceau excitateur à une fréquence de 100 Hz. Commenter.

### B. Température dans l'échantillon

En soustrayant l'équation vérifiée en régime stationnaire, on montre que  $\theta_e(z, t)$  est solution de l'équation suivante (calculs non demandés):  $\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = D_e \times \left( \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial z^2} + \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z) \cos(\Omega t) \right)$ .

21. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $g_e(z)$ . On exprimera cette équation en fonction de  $z$ ,  $\alpha$ ,  $I_0$ ,  $K_e$  et de la distance  $\delta_e = \sqrt{\frac{2D_e}{\Omega}}$ .

22. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par  $g_e(z)$  en  $z=-L_e$  et  $z=0$ ?

Dans toute la suite, on suppose que l'échantillon est optiquement et thermiquement épais, ce qui signifie  $\alpha L_e \gg 1$  et  $L_e \gg \delta_e$ . On montre alors (calcul non demandé) que  $g_e(z)$  s'écrit :

$$g_e(z) = \theta_0 \exp\left(\frac{z}{\delta_e}\right) + \frac{\alpha I_0 \delta_e^2}{K_e (\alpha^2 \delta_e^2 - 2j)} \times \left( \exp\left(\frac{z}{\delta_e}\right) - \exp(\alpha z) \right)$$

### C. Température de surface

On cherche maintenant à déterminer  $\theta_0$ , à partir de l'expression de  $g_e(z)$ , et en utilisant la relation de continuité du vecteur densité de courant thermique en  $z=0$ .

23. On suppose que l'on a  $\alpha \delta_e \gg 1$ . Déterminer  $\theta_0$  en fonction de  $I_0$ ,  $K_e$ ,  $\delta_e$ ,  $K_a$  et  $\delta_a$ . Dans cette situation, la méthode photoacoustique est-elle bien adaptée à la mesure de  $\alpha$ ?
24. On se place maintenant dans le cas où  $\alpha \delta_e \ll 1$ . Montrer qu'alors on peut écrire  $\theta_0 = A \alpha I_0$ , où  $A$  est une constante complexe, que l'on exprimera en fonction de  $K_e$ ,  $K_a$ ,  $\delta_e$  et  $\delta_a$ . Ce cas est-il favorable à la méthode photoacoustique de détermination de  $\alpha$ ? Pour un échantillon et un laser de longueur d'onde donnés, sur quel paramètre expérimental peut-on agir facilement pour se placer dans la limite  $\alpha \delta_e \ll 1$ ?
25. Application numérique : On étudie un échantillon de Silicium pour lequel  $K_e = 148 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho_e = 2,33 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c_e = 714 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , avec un laser délivrant une intensité  $I_0 = 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , modulée à une fréquence de 100 Hz. On se place à une longueur d'onde où  $\alpha = 10 \text{ m}^{-1}$ . On négligera  $\frac{K_a}{\delta_a}$  devant  $\frac{K_e}{\delta_e}$ . L'amplitude des fluctuations de température à la surface de l'échantillon est notée  $\theta_m$ . Déterminer numériquement  $\delta_e$  et  $\theta_m$ .

#### IV. Variations de pression induite

On s'intéresse maintenant aux conséquences de la variation de température  $\theta_a(z, t)$  dans l'air sur la pression qui règne dans l'enceinte. Les conditions expérimentales sont inchangées (modulation sinusoïdale d'intensité).

Afin d'obtenir un ordre de grandeur des fluctuations de pression, induites par la dilatation thermique de l'air, nous envisageons un modèle simplifié ( *figure 4* ) dans lequel on imagine que l'enceinte comprend deux compartiments séparés par une paroi fictive (sans masse), mobile sans frottements, située à l'instant  $t$  en  $z_a(t) = \delta_a + dz_a(t)$  où  $\delta_a$  est la longueur définie à la *question 18* et  $dz_a(t)$  la fluctuation de  $z_a$ . (Les fluctuations, vu leur grandeur relative très petite, peuvent être déterminées par du calcul différentiel. C'est la raison pour laquelle, afin de favoriser la lecture du texte, on a choisi par exemple de noter  $dz$  au lieu de  $\delta z$  ou  $dP$  au lieu de  $\delta P$  )

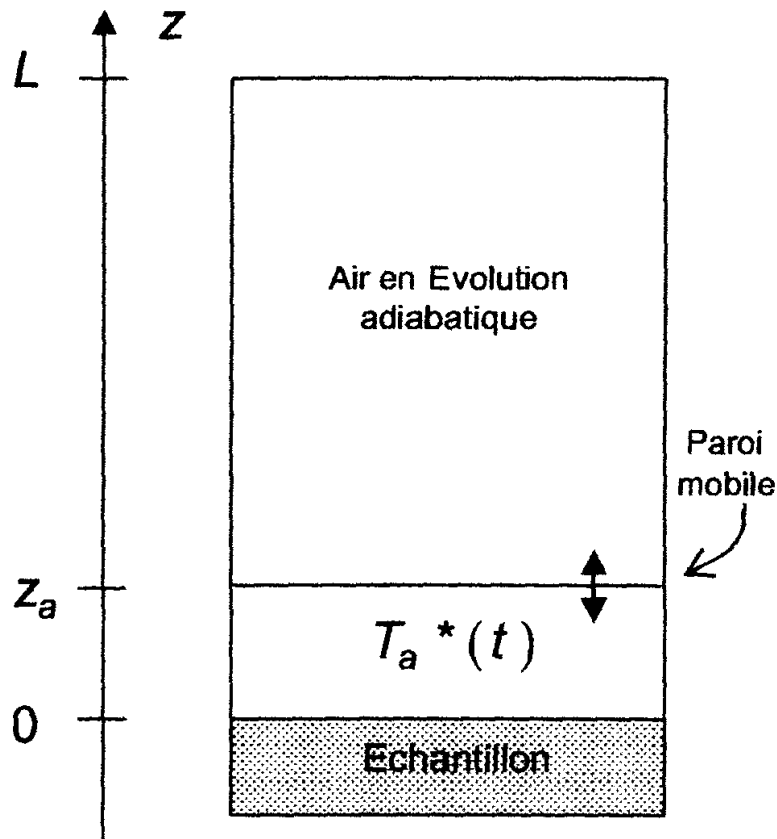


Figure 4

On fait également les suppositions suivantes :

1) La pression dans le système est uniforme et s'écrit  $P(t) = P_0 + dP_a(t)$ , où  $P_0$  est la pression moyenne dans l'enceinte.

2) L'air compris dans l'intervalle  $0 < z < z_a$  a une température uniforme  $T_a^*(t) = T_{a0} + \theta(t)$ , où  $T_{a0}$  est la température moyenne dans l'enceinte et  $\theta(t) = \theta_m \cos(\Omega t)$ ,  $\theta_m$  étant la température

de surface évaluée à la *question 25* .

3)Le reste de l'air , vérifiant  $z_a < z < L$  , est soumis à une évolution adiabatique réversible.

4)L'air est considéré comme un gaz parfait dont le rapport des capacités thermiques à pression et volume constant est  $\gamma=1,4$  .

5)Toutes les fluctuations, de température, de pression et de  $z_a$  sont très faibles devant les valeurs moyennes de ces grandeurs.

6)On rappelle que de plus,  $L \gg \delta_a$  . On suppose enfin que la surface de l'échantillon reste fixe.

26.En considérant l'air dans la région  $z_a < z < L$  , exprimer la variation de pression  $dP_a(t)$  en fonction de  $P_0$  ,  $\gamma$  ,  $L$  et  $dz_a(t)$  .

27.En considérant l'air dans la région  $0 < z < z_a$  , exprimer de même  $dP_a(t)$  en fonction de  $dz_a(t)$  ,  $T_{a0}$  ,  $P_0$  ,  $\delta_a$  et  $\theta(t)$  .

28.En déduire enfin  $dP_a(t)$  en fonction de  $\gamma$  ,  $\theta(t)$  ,  $\delta_a$  ,  $L$  ,  $P_0$  ,  $T_{a0}$  .

29.Application numérique : En utilisant les valeurs numériques données précédemment ( *question 20* et *question 25* ), déterminer l'amplitude  $dP_m$  des fluctuations de pression sachant que  $L=1\text{ cm}$  ,  $T_{a0}=300\text{ K}$  et  $P_0=10^5\text{ Pa}$  .

Réponses

Réacteur refroidi à l'hélium

1) En fonction de  $T$  et  $P$ , pour un gaz parfait :

$$dH = T dS + V dP$$

donc: 
$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T} dP$$

$$= n C_{pm} \frac{dT}{T} - n R \frac{dP}{P}$$

$$= n C_{pm} \left( \frac{dT}{T} - \frac{R}{C_{pm}} \frac{dP}{P} \right)$$

$$= n C_{pm} d \left( \ln T - \ln P^{R/C_{pm}} \right)$$

$$S = n C_{pm} \ln \frac{T}{P^{R/C_{pm}}} + S_0$$

Pour une transformation isentropique,  $S = \text{cte}$  donc

$$\frac{T}{P^\beta} = \text{Cste} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{R}{C_{pm}}$$

2) On a:

$$\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$$

et :

$$R = C_{pm} - C_{vm}$$

donc

$$\beta = \frac{C_{pm} - C_{vm}}{C_{pm}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma}$$

d'où

$$\gamma = \frac{1}{1 - \beta}$$

A.N.

$$\beta = \frac{R}{5R/2}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$\beta = 0,40$$

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}}$$

$$\gamma = \frac{5}{3} \approx 1,67$$

C'est la valeur de  $\gamma$  pour un gaz monoatomique



(cf  $C_{Vm} = 3 \times \frac{1}{2} R$  et  $C_{Pm} = 5 \times \frac{1}{2} R$ )

3)  $\rightarrow$   $\begin{matrix} T_1 \\ P_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} T_2 \\ P_2 \end{matrix}$   
adiabatique réversible

Pour la transformation 1  $\rightarrow$  2 :

$$dS = \underbrace{\delta S_{\text{échange}}}_{\text{nul car adiabatique}} + \underbrace{\delta S_{\text{création}}}_{\text{nul car réversible}}$$

S est donc constante (isentropique)

$$\frac{T_1}{P_1^\beta} = \frac{T_2}{P_2^\beta}$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^\beta$$

$$T_2 = T_1 r_p^\beta$$

A.N.  $= 300 \cdot 4^{0,4}$

$$T_2 = 522 \text{ K}$$

$\rightarrow$   $\begin{matrix} T_3 \\ P_3 = P_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} T_4 \\ P_4 = P_1 \end{matrix}$   
adiabatique réversible

Cette transformation est donc aussi isentropique

$$\frac{T_3}{P_3^\beta} = \frac{T_4}{P_4^\beta}$$

$$T_4 = T_3 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^\beta$$

$$T_4 = T_3 r_p^{-\beta}$$

A.N.  $= 1300 \cdot 4^{-0,4}$

$$T_4 = 747 \text{ K}$$

4) Transformation 2 → 3

$$\begin{array}{ccc} P_2 = 80 \cdot 10^5 \text{ Pa} & \xrightarrow{\text{isobare}} & P_3 = P_2 \\ T_2 = 522 \text{ K} & & T_3 = 1300 \text{ K} \end{array}$$

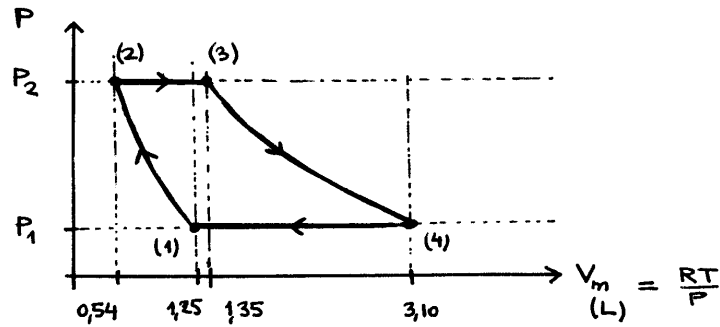
chauffage isobare

Transformation 4 → 1

$$\begin{array}{ccc} P_4 = P_1 = 20 \cdot 10^5 \text{ Pa} & \xrightarrow{\text{isobare}} & P_1 \\ T_4 = 747 \text{ K} & & T_1 = 300 \text{ K} \end{array}$$

refroidissement isobare

5)



cycle de Brayton

6) Pour un gaz parfait :

$$dU_m = \delta W_m + \delta Q_m \quad \text{avec} \quad \delta W_m = -P_{\text{ext}} dV_m$$

$$dH_m = \delta W_{m,u} + \delta Q_m$$

→ Le travail utile (cf "technique") correspond donc à :

$$\delta W_{m,u} = \delta W_m + dH_m - dU_m$$

$$\text{avec} \quad H_m = U_m + PV_m$$

$$\delta W_{m,u} = \delta W_m + d(PV_m)$$

→ Si la transformation est réversible, elle est réversible au niveau mécanique :

$$P_{\text{ext}} = P$$

$$\delta W_m = -P dV_m$$

$$\delta W_{m,u} = -P dV_m + \underbrace{d(PV_m)}_{P dV_m + V_m dP}$$

$$\delta W_{m,u} = V_m dP$$

#### Remarque

En intégrant, entre deux points,

$$\delta W_m = \delta W_{m,u} - d(PV_m)$$

on retrouve l'étude du premier principe pour une machine en écoulement permanent :

$$W_m = W_{m,u} + \underbrace{P_{\text{entrée}} V_{m,\text{entrée}} - P_{\text{sortie}} V_{m,\text{sortie}}}_{\text{travail de transvasement}}$$

7) Pour  $n$  moles :

$$dH = \delta W_{\text{utile}} + \delta Q$$

$$\downarrow$$

$$d(PV) - P_{\text{ext}} dV$$

et donc, à  $P$  constant ( $P = P_{\text{ext}} = \text{constante}$ )

$$dH = \delta Q$$

On retrouve le résultat connu pour une transformation à  $P$  constant :

$$Q = \Delta H$$

$$Q_{23} = n C_{pm} (T_3 - T_2)$$

$$Q_{23} = n C_{pm} (T_3 - T_1 r_p^\beta)$$

$$Q_{41} = n C_{pm} (T_1 - T_4)$$

$$Q_{41} = n C_{pm} (T_1 - T_3 r_p^{-\beta})$$

A.N.

$$Q_{23m} = \frac{5R}{2} (T_3 - T_1 r_p^\beta)$$

$$= \frac{5 \times 8,314}{2} (1300 - 300 \cdot 4^{0,4})$$

$$Q_{23m} = 16,2 \text{ kJ}$$

( $>0$   
cf chauffage)

$$\begin{aligned} Q_{41m} &= \frac{5R}{2} (T_1 - T_3 r_p^{-\beta}) \\ &= \frac{5 \times 8,314}{2} (300 - 1300 \cdot 4^{-0,4}) \end{aligned}$$

$$Q_{41m} = -9,28 \text{ kJ}$$

( $<0$   
cf refroidissement)

8) Pour  $n$  moles :

$$dH = \delta W_{\text{utile}} + \delta Q$$

↓ si réversible  
V dP

et donc, pour une transformation adiabatique :

$$W_{\text{utile}} = \Delta H$$

(plus facile que l'intégration  $\int V dP$ )

$$W_{12} = n C_{pm} T_1 (r_p^{\beta} - 1)$$

$$W_{34} = n C_{pm} T_3 (r_p^{-\beta} - 1)$$

A.N.

$$\begin{aligned} W_{12m} &= \frac{5R}{2} T_1 (r_p^{\beta} - 1) \\ &= \frac{5 \times 8,314}{2} 300 (4^{0,4} - 1) \end{aligned}$$

$$W_{12m} = 4,62 \text{ kJ}$$

( $>0$   
cf compression)

$$\begin{aligned} W_{34m} &= \frac{5R}{2} T_3 (r_p^{-\beta} - 1) \\ &= \frac{5 \times 8,314}{2} 1300 (4^{-0,4} - 1) \end{aligned}$$

$$W_{34m} = -11,5 \text{ kJ}$$

( $<0$   
cf détente)

9) Travail reçu par le fluide au cours d'un cycle

• soit  $Q_{\text{reçu}} = Q_{23} + Q_{41}$

$$\Delta H = W_{\text{utile}} + Q$$

nul pour  
un cycle

$$W_{\text{utile cycle}} = W_{\text{total cycle}} = -Q$$

(cf travail de  
transvasement  
nul pour un  
cycle)

• soit

$$W_{\text{utile cycle}} = W_{12} + \underbrace{W_{23}}_{\text{nul}} + W_{34} + \underbrace{W_{41}}_{\text{nul idem}}$$

cf  $W_{\text{utile}}$   
nul si isobare

$$= W_{12} + W_{34}$$

(>0                      <0  
compresseur            turbine)

on retrouve l'idée qu'il faut comptabiliser  
le travail au niveau du compresseur  
(turbine et compresseur montés sur le même  
axe)

$$= n C_{pm} (T_1 r_p^\beta - T_1 + T_3 r_p^{-\beta} - T_3)$$

$$= n C_{pm} (T_1 r_p^\beta - T_3 + r_p^{-\beta} (T_3 - T_1 r_p^\beta))$$

$$W_{\text{utile}} = -n C_{pm} (T_3 - T_1 r_p^\beta) (1 - r_p^{-\beta}) \quad (<0)$$

Mais on demande le travail fourni par le fluide à  
l'extérieur soit:  $-W_{\text{utile}}$

$$(-W_{\text{utile}}) = n C_{pm} (T_3 - T_1 r_p^\beta) (1 - r_p^{-\beta}) \quad (>0)$$

1) L'efficacité de ce cycle moteur est :

$$e = \frac{(-W_{\text{utile}})}{Q_{\text{chard}} \rightarrow Q_{23}}$$

$$= \frac{n C_{pm} (T_3 - T_1 r_p^\beta) (1 - r_p^{-\beta})}{n C_{pm} (T_3 - T_1 r_p^\beta)}$$

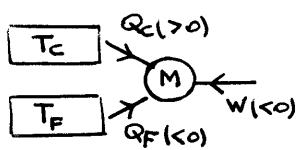
$$e = 1 - r_p^{-\beta}$$

$$e = 1 - \frac{1}{r_p^{\beta}}$$

$$\text{A.N.} = 1 - \frac{1}{4^{0,4}}$$

$$e = 0,426$$

11) Pour un cycle moteur bitherme réversible, on aura



$$\Delta U_{\text{cycle}} = Q_{\text{chaud}} + Q_{\text{froid}} + W = 0$$

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_{\text{chaud}}}{T_{\text{chaud}}} + \frac{Q_{\text{froid}}}{T_{\text{froid}}} = 0$$

$$e_{\text{CARNOT}} = \frac{-W}{Q_{\text{chaud}}}$$

$$= \frac{Q_{\text{chaud}} + Q_{\text{froid}}}{Q_{\text{chaud}}}$$

$$= 1 + \frac{Q_{\text{froid}}}{Q_{\text{chaud}}}$$

$$e_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_{\text{froid}}}{T_{\text{chaud}}}$$

En prenant les températures extrêmes du cycle réel

$$e_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

$$\text{A.N.} = 1 - \frac{300}{1300}$$

$$e_{\text{CARNOT}} = 0,769$$

Si le cycle réel est un cycle bitherme, on a bien vérifié

$$e < e_{\text{CARNOT}}$$

$$0,426 < 0,769$$

12) Optimum pour le travail ( $-W_{\text{utile}}$ ) :

On va dériver ( $-W_{\text{utile}}$ ) par rapport à  $x = r_p^{\beta}$  pour trouver l'extremum.

$$(-W_{\text{utile}}) = -n C_{pm} (T_1 x - T_1 + T_3 \frac{1}{x} - T_3)$$

$$\frac{d(-W_{\text{utile}})}{dx} = -n C_{pm} (T_1 - T_3 \frac{1}{x^2}) = 0$$

donc extremum pour :

$$x = r_p^\beta = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}$$

(on peut vérifier mathématiquement que l'extremum est un maximum mais physiquement, en constatant que  $(-W_{\text{utile}}) = 0$  pour  $x=1$  alors que  $(-W_{\text{utile}})$  était positif, la réponse est évidente)

$$r_{p \max} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$$

$$(-W_{\text{utile}})_{\max} = n C_{pm} (\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$$

$$e_{\text{travail max}} = 1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}$$

13)

$$r_{p \max} = \left(\frac{1300}{300}\right)^{\frac{1}{2 \times 0,4}}$$

$$r_{p \max} = 6,25$$

$$e_{\text{travail max}} = 1 - \sqrt{\frac{300}{1300}}$$

$$e_{\text{travail max}} = 0,520$$

Ici  $W_{\max}$  conduit à une efficacité supérieure ( $0,520 > 0,426$ ).  
Avec d'autres valeurs de températures extrêmes, l'optimisation du travail aurait pu conduire à une efficacité inférieure.  
Pas de lien direct entre les deux grandeurs.

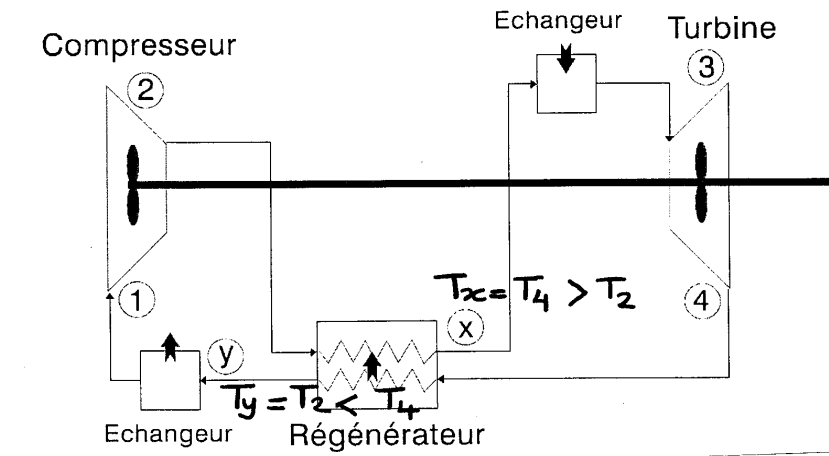
14)

$$Q_{x3} = n C_{pm} (T_3 - T_x)$$

$$Q_{x3} = n C_{pm} (T_3 - T_4) \quad (> 0)$$

$$Q_{y1} = n C_{pm} (T_1 - T_y)$$

$$Q_{y1} = n C_{pm} (T_1 - T_2) \quad (< 0)$$



- 15) Le régénérateur stocke de la chaleur et la rend. La chaleur que doit fournir la source chaude extérieure est alors moindre et vaut  $Q_{23}$ . Pour le reste rien n'est modifié.

$$e = \frac{(-W_{utile})}{Q_{23}}$$

$$= \frac{n C_{pm} (T_3 - T_1 r_p^\beta) (1 - r_p^{-\beta})}{n C_{pm} T_3 (1 - r_p^{-\beta})}$$

$$e = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^\beta$$

avec régénérateur

A.N.

$$= 1 - \frac{300}{1300} 4^{0,4}$$

$$e = 0,598$$

15) On veut

$$e_{\text{avec régénérateur}} = e_{\text{sans régénérateur}}$$

$$1 - \frac{T_1}{T_3} r_{p_0}^\beta = 1 - \frac{1}{r_{p_0}^\beta}$$

$$r_{p_0}^\beta = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}$$

$$e = 1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}} \quad (\text{on retrouve } e_{\text{travail max}})$$

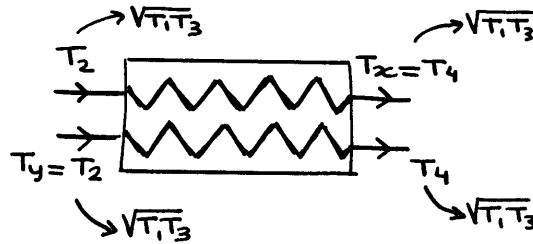


Dans ce cas

$$T_2 = T_1 \cdot r_{pe}^\beta = \sqrt{T_1 T_3}$$

$$T_4 = T_3 \cdot r_{pe}^{-\beta} = \sqrt{T_1 T_3}$$

$$T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3}$$



Le régénérateur ne sert plus à rien.

17) A.N.  $r_{pe} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$   
 $= \left(\frac{1300}{300}\right)^{\frac{1}{2 \times 0,4}}$

$$r_{pe} = 6,25$$

18)

$$e = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^\beta$$

avec  
régénérateur

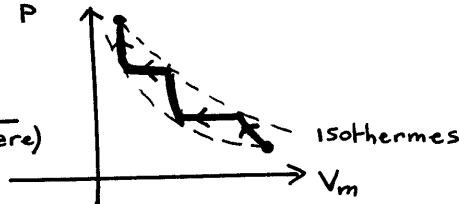
$$e_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Pour atteindre l'efficacité de CARNOT, il faut donc

$$r_p = \frac{P_2}{P_1} = 1$$

Dans la compression ( et la détente ) les pressions finale et initiale sont "identiques" ( proches ). Il faut réaliser la compression ( et la détente ) en plusieurs étapes tels que pour chacun  $P_{\text{final}}$  proche de  $P_{\text{initial}}$ .

compression en plusieurs étapes (isentropique + isobare) se rapprochant de la compression isotherme.



$$19) \quad \frac{\partial u_v}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{j}_Q) + \sigma_Q$$

On fait un bilan thermique à volume constant  
(d'où utilisation de l'énergie interne).

Le bilan concerne des grandeurs volumiques (en  $\text{W.m}^{-3}$ )

→  $\frac{\partial u_v}{\partial t}$  : puissance volumique stockée  
(dérivée de l'énergie interne volumique)

→  $-\operatorname{div} \vec{j}_Q$  : puissance volumique reçue par conduction  
(flux de  $\vec{j}_Q$  entrant par unité de volume)

→  $\sigma_Q$  : puissance produite par les sources par unité de volume

20) En régime stationnaire, on aura : ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )

$$\operatorname{div} \vec{j}_Q = \sigma_Q$$

(la puissance volumique sortant est égale à la puissance volumique produite par les sources)

21) Dans le cœur, en régime stationnaire :

$$\operatorname{div} \vec{j}_Q = \sigma_Q$$

$$\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) = \sigma_Q$$

$$-\lambda \Delta T = \sigma_Q$$

$$\Delta T = -\frac{\sigma_Q}{\lambda}$$

Le problème est à symétrie sphérique donc  $T = T(r)$

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right)$$

On résout :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\sigma_Q}{\lambda}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\sigma_Q}{\lambda} r^2$$

$$r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma_Q}{\lambda} \frac{r^3}{3} + A$$

La constante  $A$  est nulle.  
 - soit on le voit en étudiant  $r^2 \frac{dT}{dr}$  au centre avec  
 $(r^2 \frac{dT}{dr})_{r=0} = 0$  donc  $A=0$   
 - soit on écrit  $\frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma_Q}{\lambda} \frac{r}{3} + \frac{A}{r^2}$  et on constate  
 (si l'on garde  $A$ ) que  $\frac{dT}{dr}$  est infini en  $r=0$ , ce qui est  
 possible en présence d'une source ponctuelle au centre  
 mais pas ici (répartition volumique) donc  $A=0$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma_Q}{\lambda} \frac{r}{3}$$

puis :

$$T = -\frac{\sigma_Q}{\lambda} \frac{r^2}{6} + B$$

C.L.  $T_0 = 0 + B$

$$T = T_0 - \frac{\sigma_Q}{\lambda} \frac{r^2}{6}$$

22)

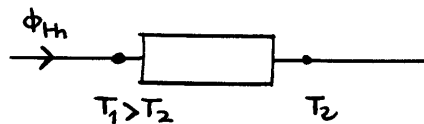
$$T_1 - T_0 = -\frac{\sigma_Q}{\lambda} \frac{r^2}{6}$$

A.N.

$$= -\frac{5,0 \cdot 10^9 (250 \cdot 10^{-6})^2}{12 \times 6}$$

$$T_1 - T_0 = -4,34 \text{ K}$$

23)



$$T_1 - T_2 = R_{Th} \phi_{Th}$$

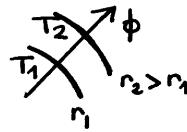
24)

$$\begin{aligned} \phi_{Th} &= \oint_{\text{sphère}} \vec{q} \cdot \vec{dS} \\ &= \oint -\lambda \frac{dT}{dr} dS \\ &= -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 \\ \phi_{Th} &= 4\pi\lambda \frac{dT}{-(\frac{dr}{r^2})} \end{aligned}$$

$$\Phi_{Hh} = 4\pi\lambda \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$A = 4\pi\lambda$$

$$25) \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{\Phi_{Hh}}{4\pi\lambda} \int_{r_1}^{r_2} d\left(\frac{1}{r}\right)$$



$$T_2 - T_1 = \frac{\Phi_{Hh}}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{4\pi\lambda} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \Phi_{Hh}$$

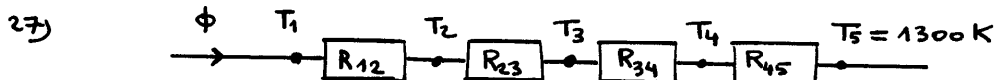
$$R_{Hh,12} = \frac{1}{4\pi\lambda} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$26) R_{Hh,12} = \frac{1}{4\pi \cdot 0,5} \frac{345 \cdot 10^{-6} - 250 \cdot 10^{-6}}{345 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 175,3 \text{ KW}^{-1}$$

$$R_{Hh,23} = \frac{1}{4\pi \cdot 4} \frac{385 \cdot 10^{-6} - 345 \cdot 10^{-6}}{385 \cdot 10^{-6} \cdot 345 \cdot 10^{-6}} = 5,99 \text{ KW}^{-1}$$

$$R_{Hh,34} = \frac{1}{4\pi \cdot 20} \frac{420 \cdot 10^{-6} - 385 \cdot 10^{-6}}{420 \cdot 10^{-6} \cdot 385 \cdot 10^{-6}} = 0,86 \text{ KW}^{-1}$$

$$R_{Hh,45} = \frac{1}{4\pi \cdot 4} \frac{460 \cdot 10^{-6} - 420 \cdot 10^{-6}}{460 \cdot 10^{-6} \cdot 420 \cdot 10^{-6}} = 4,12 \text{ KW}^{-1}$$



Il faut d'abord déterminer  $\phi$

$$\phi = \frac{4}{3} \pi r_1^3 \sigma_Q$$

$$\text{A.N.} \quad = \frac{4}{3} \pi (250 \cdot 10^{-6})^3 \cdot 5 \cdot 10^8$$

$$\phi = 0,327 \text{ W}$$

Puis

$$T_4 - T_5 = R_{45} \phi$$

$$T_4 = R_{45} \phi + T_5$$

$$T_3 = (R_{34} + R_{45}) \phi + T_5 \quad \text{ou}$$

$$T_3 = R_{34} \phi + T_4$$

$$T_2 = (R_{23} + R_{34} + R_{45}) \phi + T_5 \quad \text{ou}$$

$$T_2 = R_{23} \phi + T_3$$

$$T_1 = (R_{12} + R_{23} + R_{34} + R_{45}) \phi + T_5 \quad \text{ou}$$

$$T_1 = R_{12} \phi + T_2$$

$$T_5 = 1300 \text{ K}$$

$$T_4 = 1301,35 \text{ K}$$

$$T_3 = 1301,63 \text{ K}$$

$$T_2 = 1303,59 \text{ K}$$

$$T_1 = 1360,96 \text{ K}$$

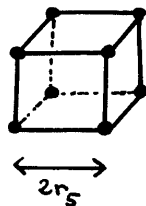
28)

$$N_{\text{particules triso}} = \frac{P_{\text{th}}}{\phi}$$

$$= \frac{600 \cdot 10^6}{0,327}$$

$$N = 1,83 \cdot 10^9$$

29)



L'empilement étant supposé cubique simple (contact sur les arêtes)  
 Dans le volume  $V = (2r_s)^3$  il y a  $8 \times \left(\frac{1}{8}\right) = 1$  particule triso.

$$V_{\text{total}} = V \times N$$

$$V_{\text{total}} = (2r_s)^3 \times N$$

$$= 2^3 (460 \cdot 10^{-6})^3 \times 1,83 \cdot 10^9$$

$$V = 1,43 \text{ m}^3$$

3g

$$e = \frac{P_{\text{électrique}}}{P_{\text{thermique}}}$$

$$\text{A.N.} = \frac{300}{600}$$

$$e = 0,50$$

31)

helium

1 mole

$$P = P_2 = 80 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T = T_c = 1300 \text{ K}$$

→  
détente  
isotherme

1 mole

$$P = P_1 = 20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T = T_c = 1300 \text{ K}$$

$$dH_m = \delta W_{\text{utile},m} + \delta Q_m$$

nul  
car  
 $H = H(T)$

↓ réversible  
 $V_m dP$

donc :

$$\begin{aligned} \delta Q_m &= -V_m dP \\ &= -RT_c \frac{dP}{P} \end{aligned}$$

$$Q_c = -RT_c \ln \frac{P_1}{P_2}$$

A.N.

$$= -8,314 \times 1300 \times \ln \frac{20 \cdot 10^5}{80 \cdot 10^5}$$

$$Q_c = 15,0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

32) La puissance thermique  $P_{\text{th}}$  doit être évaluée par l'hélium

$$P_{\text{th}} = Q_c \times D_{\text{molaire hélium}}$$

↑  
W

↑  
J.mol<sup>-1</sup>

↑  
débit molaire  
mol.s<sup>-1</sup>

$$P_{th} = Q_c \times D_{massique} / M_{masse\ molaire}$$

Kg.s<sup>-1</sup> / Kg.mol<sup>-1</sup>

finallement :

$$D_{massique} = \frac{P_{th} M}{Q_c}$$

A.N.  $= \frac{600 \cdot 10^6 \times 4 \cdot 10^{-3}}{15 \cdot 10^3}$

$$D_{massique} = 160 \text{ Kg s}^{-1}$$

---

## Détermination de spectre d'absorption par effet photoacoustique

1) Loi de Fourier: le vecteur densité de courant thermique de conduction est proportionnel à  $-\vec{\text{grad}} T$

$$\vec{j}_Q = -K \vec{\text{grad}} T$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 $\text{W m}^{-2}$                        $\text{K m}^{-1}$   
 conductivité  
 thermique en  
 $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$

2) Le signe moins est en lien avec le second principe: il indique que le flux de chaleur va spontanément des températures les plus élevées vers les températures plus faibles, c'est à dire en sens contraire du gradient de T.

3)  $dT = \vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M} = 0$

Si on se déplace de  $d\vec{M}$  selon la surface isotherme passant par un point P (donc  $dT = 0$ ), le  $\vec{\text{grad}} T$  en ce point P doit donc être perpendiculaire à  $d\vec{M}$ .

Ceci doit être vrai quelque soit  $d\vec{M}$  autour de P sur la surface isotherme. Donc  $\vec{\text{grad}} T$  est perpendiculaire à la surface isotherme.  
 Or  $\vec{j} = -K \vec{\text{grad}} T$ .

$$\vec{j}_{(P,t)} \text{ est perpendiculaire à la surface isotherme passant par P}$$

4) Pour le volume  $S dz$  pendant  $dt$ , on a à pression constante:

$$d^2 H = \delta^2 Q_{\text{reçu}} + \delta^2 Q_{\text{produit}}$$

$$S dz \rho c \frac{\delta T}{\delta t} dt = j(z,t) S dt + p S dz dt - j(z+dz,t) S dt$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 ou :  
 $-\frac{\partial j}{\partial z} dz S dt$



En simplifiant par  $S dz dt$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} + P$$

et avec  $\vec{q} = -K \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + P$$

5) En l'absence de sources internes ( $P=0$ )

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

6) En régime permanent  $T = T(z)$ , l'équation devient :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$$

$$\text{C.L.} \quad \begin{cases} T = A z + B \\ T_1 = A z_1 + B \\ T_2 = A z_2 + B \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad A = \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1}$$

$$B = T_1 - A z_1$$

$$T - T_1 = A (z - z_1)$$

$$T - T_1 = (T_2 - T_1) \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

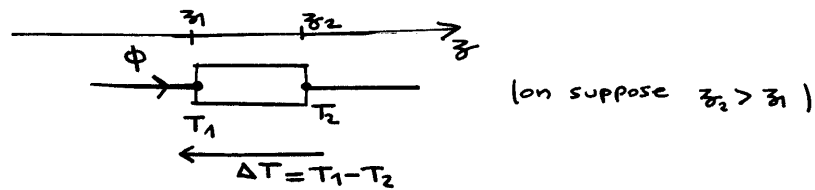
Puis

$$\begin{aligned} q &= -K \frac{dT}{dz} \\ &= -K \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} \end{aligned}$$

$\phi$  compté positivement dans le sens de l'axe  $z$

$$\phi = q S$$

$$\phi = -K \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} S$$



$$\phi = G_c \Delta T \quad \text{donne:}$$

$$G_c = \frac{K S}{(z_2 - z_1)}$$

$$R_c = \frac{(z_2 - z_1)}{K S}$$

7) Fourier a inventé l' "analyse de Fourier" : décomposition d'une fonction mathématique en une somme de fonctions sinus et cosinus.

8) Dans l'air, en régime stationnaire  $T_2 = T_2(z)$

$$\frac{d^2 T_2}{dz^2} = 0$$

$$T_2 = A z + B$$

9) Conditions aux limites :

$$\text{en } z=0 \quad T_2(z=0^+) = T_c(z=0^-)$$

$$\text{en } z=L \quad \phi(z=L) = 0$$

(cf paroi adiabatique)

donc :

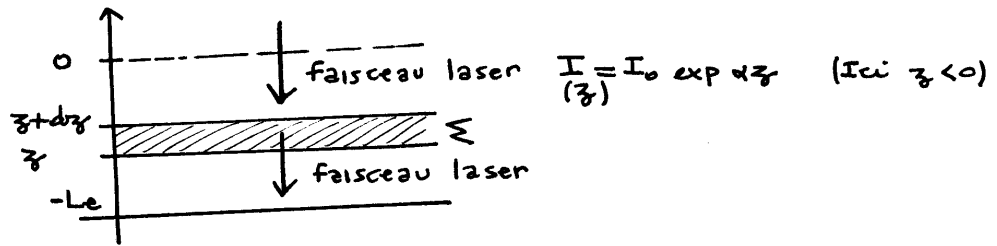
$$\left( \frac{dT_2}{dz} \right)_{z=L} = 0$$

soit :

$$A = 0$$

$$T_{2s} = B = \text{cste}$$

10)



- énergie apportée par l'onde lumineuse en  $z+dz$  pendant  $dt$

$$d\mathcal{E}_{\text{lumineuse}}(z+dz) = I_0 \exp(\alpha(z+dz)) S dt$$

- énergie sortant en  $z$  pendant  $dt$

$$d\mathcal{E}_{\text{lumineuse}}(z) = I_0 \exp(\alpha z) S dt$$

- énergie reçue par le système  $\Sigma$  pendant  $dt$

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{\text{reçue}} &= d\mathcal{E}_{\text{lum}}(z+dz) - d\mathcal{E}_{\text{lum}}(z) \\ &= I_0 \left( \exp(\alpha(z+dz)) - \exp(\alpha z) \right) S dt \\ &= I_0 \underbrace{\left( \exp(\alpha z) \exp(\alpha dz) - \exp(\alpha z) \right)}_{\frac{d}{dz} \exp(\alpha z) dz} S dt \end{aligned}$$

$$\approx I_0 \alpha \exp(\alpha z) S dz dt$$

et donc, la puissance reçue par le système  $\Sigma$  est :

$$dP_{\text{lum reçue}} = I_0 \alpha \exp(\alpha z) S dz$$

- Cette puissance entraîne l'apparition d'une puissance thermique au sein du milieu donc un terme de production volumique

$$p = \frac{dP}{dV} \rightarrow S dz$$

$$p = I_0 \alpha \exp(\alpha z)$$

- Le temps caractéristique des évolutions thermiques est bien plus grand que la période du phénomène lumineux.  
Pour l'onde lumineuse, puisque l'on étudie ici la thermique, on peut travailler avec des valeurs moyennes dans le temps.

11) On a vu en 4) que le bilan thermique donnait :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_e}{\partial t} &= \frac{K_e}{\rho_e c_e} \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + \frac{\rho_0}{\rho_e c_e} \\ &= \frac{K_e}{\rho_e c_e} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + \frac{\rho_0}{K_e} \right)\end{aligned}$$

En reportant la valeur de  $\rho$  obtenue en 10)

$$\boxed{\frac{\partial T_e}{\partial t} = D_e \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + \frac{\alpha I_0 \exp(\alpha z)}{K_e} \right)}$$

avec  $D_e = \frac{K_e}{\rho_e c_e}$  (diffusivité)

12) En régime stationnaire :

$$\frac{d^2 T_e}{dz^2} = - \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z)$$

$$\frac{dT_e}{dz} = - \frac{I_0}{K_e} \exp(\alpha z) + A'$$

$$\boxed{T_{es} = - \frac{I_0}{K_e \alpha} \exp(\alpha z) + A'z + B'}$$

13) Le contact thermique air - échantillon est supposé parfait en  $z=0$

$$\boxed{T_e(z=0^-, t) = T_a(z=0^+, t)}$$

Il y a obligatoirement continuité du flux thermique en  $z=0$  ce qui se traduit par

$$\vec{j}_e(z=0^-, t) = \vec{j}_a(z=0^+, t)$$

$$\boxed{-K_e \frac{\partial T_e}{\partial z}(z=0^-, t) = -K_a \frac{\partial T_a}{\partial z}(z=0^+, t)}$$

14) On a vu  $T_{as} = B$   
 $T_{es} = - \frac{I_0}{K_e \alpha} \exp(\alpha z) + A'z + B'$  } régime stationnaire

Pour déterminer  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ , on écrit les deux relations de 13) et on tient compte aussi de  $T_e(z=-L_e) = T_0$

Donc :

- $-\frac{I_0}{K_e \alpha} + B' = B$  (1)

- $-K_e \left( -\frac{I_0}{K_e} + A' \right) = 0$  (2)

- $-\frac{I_0}{K_e \alpha} \exp(-\alpha L_e) - A' L_e + B' = T_0$  (3)

En éliminant  $B'$  dans Tes avec (3)

$$T_{es}(z) - T_0 = -\frac{I_0}{K_e \alpha} \left( \exp(\alpha z) - \exp(-\alpha L_e) \right) + A' (z + L_e)$$

puis avec (2) on remplace  $A'$  par  $\frac{I_0}{K_e}$

$$T_{es}(z) - T_0 = \frac{I_0}{K_e \alpha} \left( \exp(-\alpha L_e) - \exp(\alpha z) \right) + \frac{I_0}{K_e} (z + L_e)$$

15)

remarque: si  $\alpha$  "grand" (à préciser)

on aura  $\frac{\exp(-\alpha |z|)}{\alpha} \ll |z|$

Il faut (résolution numérique)

$$\alpha |z| \gg 0,567$$

$$|z| \gg \frac{0,567}{\alpha}$$

Expression simplifiée si  $\alpha \gg$  (absorption de l'échantillon très grande)

$$T_{es}(z) - T_0 \approx \frac{I_0}{K_e} (z + L_e)$$

$$\vec{\mathcal{J}}_{es} = -K_e \frac{dT_{es}}{dz} \vec{u}_z$$

$$= -K_e \frac{I_0}{K_e} \vec{u}_z$$

$$= -I_0 \vec{u}_z$$

(c'est aussi la valeur en  $-L_e$ )

$$\Phi = \iint_{\mathcal{F}_{es}} \vec{\mathcal{J}}_{es} \cdot \vec{dS} \quad \vec{dS} \rightarrow dS (-\vec{u}_z)$$

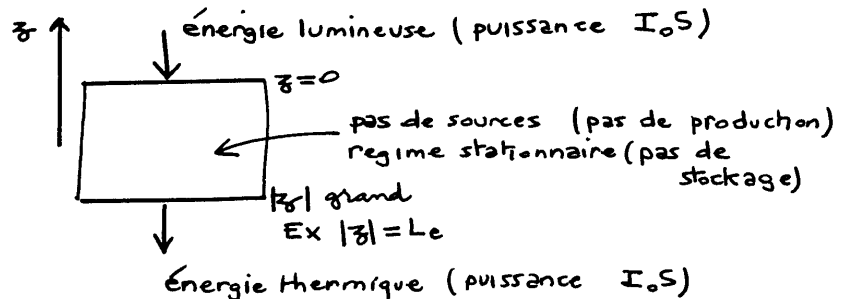
(on compte positivement le flux selon  $-\vec{u}_z$ )

$$\Phi = I_0 S$$

(c'est aussi la valeur en  $-L_e$ )

Si on fait un bilan énergétique sur l'échantillon entre  $z=0$

et  $z_0$  suffisamment grand (en valeur absolue) pour que l'énergie lumineuse ait été totalement absorbée (afin que l'approximation précédente soit valable)



L'énergie entrée sous forme lumineuse doit donc ressortir sous forme thermique.

16) En utilisant l'expression simplifiée

$$T_{es}(z) = \frac{I_0}{K_e} (z + L_e) + T_0$$

donc :

$$T_{es}(z=0^-) = \frac{I_0 L_e}{K_e} + T_0$$

ou :

$$T_{as}(z) = T_{as}(z=0^+) = T_{es}(z=0^-)$$

$$T_{as}(z) = \frac{I_0 L_e}{K_e} + T_0$$

remarque :

En partant des formules exactes :

$$T_{es}(z) - T_0 = \frac{I_0}{K_e \alpha} (\exp(-\alpha L_e) - \exp(\alpha z)) + \frac{I_0}{K_e} (z + L_e)$$

$$T_{es}(0) - T_0 = \frac{I_0}{K_e \alpha} (\exp(-\alpha L_e) - 1) + \frac{I_0}{K_e} L_e$$

$$= \frac{I_0 L_e}{K_e} \left[ \frac{\exp(-\alpha L_e) - 1}{\alpha L_e} + 1 \right]$$

negligeable

et

$$1 - \exp(-\alpha L_e) \ll \alpha L_e \text{ si } \alpha L_e \gg 1$$

- 17)  $\alpha$  n'intervient pas dans  $T_{25}$  donc cette expérience ne permet pas de mesurer  $\alpha$ .

18) on a : 
$$\frac{\partial T_2(z,t)}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 T_2(z,t)}{\partial z^2}$$

et en régime stationnaire, on avait :

$$0 = D_a \frac{\partial^2 T_{25}(z)}{\partial z^2}$$

En faisant la différence puisque  $T_2(z,t) = T_{25}(z) + \theta_2(z,t)$

$$\frac{\partial T_2(z,t)}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2}{\partial z^2} (T_2(z,t) - T_{25}(z))$$

$$\boxed{\frac{\partial \theta_2(z,t)}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 \theta_2(z,t)}{\partial z^2}}$$

On travaille en complexes avec  $\theta_2(z,t) = g_2(z) \exp(j\Omega t)$

$$j\Omega g_2(z) \exp(j\Omega t) = D_a \frac{d^2 g_2(z)}{dz^2} \exp(j\Omega t)$$

soit

$$\frac{d^2 g_2(z)}{dz^2} = \frac{j\Omega}{D_a} g_2(z)$$

$$\text{avec } (1+j)^2 = 1 + j^2 + 2j = 2j$$

$$\frac{d^2 g_2(z)}{dz^2} = \frac{(1+j)^2 \Omega}{2 D_a} g_2(z)$$

$$\boxed{s_2 = \sqrt{\frac{2 D_a}{\Omega}}}$$

$$\boxed{\frac{d^2 g_2(z)}{dz^2} - \left(\frac{1+j}{s_2}\right)^2 g_2(z) = 0}$$

- 19) En  $z=L$ , la paroi est adiabatique, donc

$$\vec{q}(z=L,t) = \vec{0}$$

avec  $\beta = -\lambda \frac{\partial T_a}{\partial z}$

donc il faut que

$$\left( \frac{dg_a(z)}{dz} \right)_{z=L} = 0$$

La solution est :

$$g_a(z) = A \exp\left(\frac{(1+\beta)z}{\delta_a}\right) + B \exp\left(-\frac{(1+\beta)z}{\delta_a}\right)$$

si on admet que  $z \rightarrow \infty$ , le terme en  $\exp\left(+\frac{z}{\delta_a}\right)$  tend vers l'infini, ce qui n'a pas de sens physique.  
On doit donc faire  $A = 0$

$$g_a(z) = B \exp\left(-\frac{(1+\beta)z}{\delta_a}\right)$$

C.L. en  $z=0$   $\theta_0 = B$

$$g_a(z) = \theta_0 \exp\left(-\frac{(1+\beta)z}{\delta_a}\right)$$

$\delta_a$  est une distance caractéristique pour l'atténuation de  $g_a(z)$

$g_a(z)$  est nul (à 1% près) au bout d'un parcours de 4 ou 5  $\delta_a$

20) A.N.

$$\delta_a = \sqrt{\frac{2D_a}{\Omega}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 2,2 \cdot 10^{-5}}{2\pi \cdot 100}}$$

$$\delta_a = 0,265 \text{ mm}$$

$g_a(z)$  est négligeable pour  $z = 1 \text{ à } 2 \text{ mm}$ .

21)

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = D_e \times \left( \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial z^2} + \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z) \cos(\Omega t) \right)$$

en complexes

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = D_e \times \left( \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial z^2} + \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z) \exp(j\Omega t) \right)$$



$$j\Omega \vartheta_e(z) \exp(j\Omega t) = D_e \times \left( \frac{d^2 \vartheta_e(z)}{dz^2} \exp(j\Omega t) + \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z) \exp(j\Omega t) \right)$$

$$\frac{d^2 \vartheta_e(z)}{dz^2} = \frac{j\Omega}{D_e} \vartheta_e(z) - \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z)$$

$$\frac{d^2 \vartheta_e(z)}{dz^2} = \left( \frac{1+j}{\delta_e} \right)^2 \vartheta_e(z) - \frac{\alpha I_0}{K_e} \exp(\alpha z)$$

$$\text{avec } \delta_e = \sqrt{\frac{2D_e}{j\Omega}}$$

22) Continuité de T en  $z=0$  (contact parfait) :

$$\vartheta_e(z=0) = \vartheta_a(z=0)$$

Continuité du flux thermique en  $z=0$  (cf  $j = -K \frac{\partial T}{\partial z}$ )

$$K_e \frac{d\vartheta_e}{dz}(z=0) = K_a \frac{d\vartheta_a}{dz}(z=0)$$

Température égale à  $T_0$  en  $-L_e$

$$\vartheta_e(z=-L_e) = 0$$

$$\rightarrow \vartheta_e(z) = \theta_0 \exp\left((1+j)\frac{z}{\delta_e}\right) + \frac{\alpha I_0 \delta_e^2}{K_e(\alpha^2 \delta_e^2 - 2j)} \left( \exp\left((1+j)\frac{z}{\delta_e}\right) - \exp(\alpha z) \right)$$

avec  $\alpha \delta_e \gg 1$  (on néglige le  $2j$  dans  $\alpha^2 \delta_e^2 - 2j$ )

$$\vartheta_e(z) \approx \theta_0 \exp\left((1+j)\frac{z}{\delta_e}\right) + \frac{I_0}{K_e \alpha} \left( \exp\left((1+j)\frac{z}{\delta_e}\right) - \exp(\alpha z) \right)$$

$$\frac{d\vartheta_e(z)}{dz} = \theta_0 \frac{1+j}{\delta_e} \exp\left((1+j)\frac{z}{\delta_e}\right) + \frac{I_0}{K_e \alpha} \left( \frac{1+j}{\delta_e} \exp\left((1+j)\frac{z}{\delta_e}\right) - \alpha \exp(\alpha z) \right)$$

$$\frac{d\vartheta_e(z)}{dz}(z=0) = \theta_0 \frac{1+j}{\delta_e} + \frac{I_0}{K_e \alpha} \left( \frac{1+j}{\delta_e} - \alpha \right)$$

$$\rightarrow \vartheta_a(z) = \theta_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_a}\right)$$

$$\frac{d\vartheta_a(z)}{dz} = \theta_0 \times -\frac{1}{\delta_a} \exp\left(-\frac{z}{\delta_a}\right)$$

$$\frac{d\vartheta_a(z)}{dz}(z=0) = -\theta_0 \frac{1}{\delta_a}$$

→ On utilise la continuité du vecteur densité de courant thermique

$$K_e \frac{d\vartheta_e}{dz} (z=0) = K_a \frac{d\vartheta_a}{dz} (z=0)$$

$$K_e \left( \theta_0 \frac{1+\beta}{\delta_e} + \frac{I_0}{K_e \alpha} \left( \frac{1+\beta}{\delta_e} - \alpha \right) \right) = K_a \left( -\theta_0 \frac{1+\beta}{\delta_a} \right)$$

$$\theta_0 (1+\beta) \left( \frac{K_e}{\delta_e} + \frac{K_a}{\delta_a} \right) = I_0 \left( 1 - \frac{1+\beta}{\alpha \delta_e} \right)$$

~~avec  $\alpha \delta_e \gg 1$~~

$$\theta_0 = \frac{I_0}{(1+\beta) \left( \frac{K_e}{\delta_e} + \frac{K_a}{\delta_a} \right)}$$

Indépendant de  $\alpha$ .

La méthode pour mesurer  $\alpha$  ne convient pas.

$$24) \rightarrow \vartheta_e(z) = \theta_0 \exp\left((1+\beta)\frac{z}{\delta_e}\right) + \frac{\alpha I_0 \delta_e^2}{K_e(\alpha^2 \delta_e^2 - 2\beta)} \left( \exp\left((1+\beta)\frac{z}{\delta_e}\right) - \exp \alpha z \right)$$

avec  $\alpha \delta_e \ll 1$  (on néglige  $\alpha^2 \delta_e^2$  dans  $\alpha^2 \delta_e^2 - 2\beta$ )

$$\vartheta_e(z) \approx \theta_0 \exp\left((1+\beta)\frac{z}{\delta_e}\right) + \frac{\beta \alpha I_0 \delta_e^2}{2K_e} \left( \exp\left((1+\beta)\frac{z}{\delta_e}\right) - \exp \alpha z \right)$$

$$\frac{d\vartheta_e(z)}{dz} = \theta_0 \frac{1+\beta}{\delta_e} \exp\left((1+\beta)\frac{z}{\delta_e}\right) + \frac{\beta \alpha I_0 \delta_e^2}{2K_e} \left( \frac{1+\beta}{\delta_e} \exp\left((1+\beta)\frac{z}{\delta_e}\right) - \alpha \exp \alpha z \right)$$

$$\frac{d\vartheta_e(z)}{dz} (z=0) = \theta_0 \frac{1+\beta}{\delta_e} + \frac{\beta \alpha I_0 \delta_e}{2K_e} (1+\beta) - \frac{\beta I_0 \alpha^2 \delta_e^2}{2K_e} \quad \alpha \delta_e \ll 1$$

$$\rightarrow \frac{d\vartheta_a(z)}{dz} (z=0) = -\theta_0 \frac{1+\beta}{\delta_a}$$

$$\rightarrow K_e \frac{d\vartheta_e}{dz} (z=0) = K_a \frac{d\vartheta_a}{dz} (z=0)$$

$$K_e (1+\beta) \left( \frac{\theta_0}{\delta_e} + \frac{\beta \alpha I_0 \delta_e}{2K_e} \right) = -K_a \frac{\theta_0}{\delta_a} (1+\beta)$$

$$\theta_0 \left( \frac{K_e}{\delta_e} + \frac{K_a}{\delta_a} \right) = -\frac{\beta \alpha I_0 \delta_e}{2}$$

$$\theta_0 = -\beta \frac{\delta_e/2}{\underbrace{\frac{K_e}{\delta_e} + \frac{K_a}{\delta_a}}_A} \alpha I_0$$

Dépend de  $\alpha$  et permettra donc une mesure.

$$\rightarrow \alpha \delta_e = \alpha \sqrt{\frac{2D_e}{\Omega}}$$

Pour diminuer  $\alpha \delta_e$ , il faut diminuer  $\delta_e$  donc

augmenter  $\Omega$

25) A.N.

$$D_e = \frac{K_e}{\rho_e c_e}$$

$$= \frac{148}{2,33 \cdot 10^3 \cdot 714}$$

$$D_e = 89 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\delta_e = \sqrt{\frac{2 D_e}{\Omega}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 89 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 100}}$$

$$\delta_e = 0,53 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_m = |\theta_0|$$

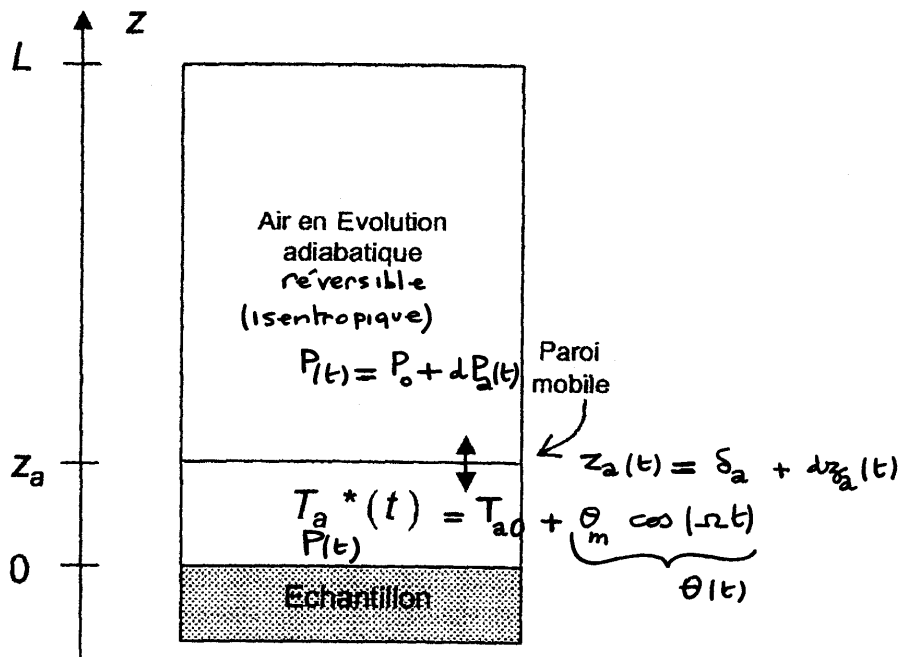
$$= \frac{\delta_e / 2}{\frac{K_e}{\delta_e} + \frac{K_a}{\delta_a}} \propto I_0$$

~~$\frac{K_a}{\delta_a}$~~  négligeable

$$= \frac{\delta_e^2 \propto I_0}{2 K_e}$$

$$= \frac{(0,53 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10 \cdot 10^3}{2 \cdot 148}$$

$$\theta_m = 9,6 \mu\text{K}$$



26) Pour l'air en évolution isentropique

$$P V^\gamma = \text{cste}$$

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{cste}'$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

avec les notations du problème :

$$\frac{dP_2(t)}{P_0} + \gamma \frac{(-S dz_2(t))}{(S(L - \delta_a))} = 0$$

négligeable

$$\frac{dP_2(t)}{P_0} - \gamma \frac{dz_2(t)}{L} = 0$$

$$dP_2(t) = \frac{\gamma P_0}{L} dz_2(t)$$

27) Pour l'air au voisinage de l'échantillon, dont la température  $T_2^*(t)$  varie :

$$P V = n R T$$

$$\ln P + \ln V = \ln(nR) + \ln T$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

avec les notations du problème :

$$\frac{dP_2(t)}{P_0} + \frac{dz_2(t)}{\delta_2} = \frac{\theta(t)}{T_{20}}$$

$$dP_2(t) = -\frac{P_0}{\delta_2} dz_2(t) + \frac{P_0}{T_{20}} \theta(t)$$

28) On élimine  $dz_2(t)$  entre les deux expressions.

$$dP_2(t) = \frac{P_0/T_{20}}{1 + \frac{L}{\gamma \delta_2}} \theta(t)$$

29) A.N.

$$\delta P_a(t) = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{L}{\gamma \delta_2}\right) T_{20}} \theta(t)$$

$$\delta P_m = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{L}{\gamma \delta_2}\right) T_{20}} \theta_m$$

$$= \frac{10^5 \cdot 9,6 \cdot 10^{-6}}{\left(1 + \frac{0,01}{1,4 \cdot 0,265 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot 300}$$

$$\delta P_m = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$$